1 Lineare Gleichungen

Lineare Gleichungen sind die erste Art von Gleichungen, die du kennengelernt hast. Und so, wie du im ersten Schuljahr gelernt hast, wie man liest und schreibt und das bis heute brauchst, so brauchst du die Gleichungen immer wieder. Zeit, dass wir sie einmal wiederholen!

Grundlegend für die Gleichungen sind Terme. In einer Gleichung kommen zwei Terme vor, die wir gleichsetzen.

Hat die Gleichung nur eine Variable, und finden wir für diese Variable eine Zahl, die wir für sie einsetzen können, so dass links und rechts dasselbe herauskommt, nennen wir diese Zahl eine *Lösung* für diese Gleichung.

Haben wir mehrere Variablen, so müssen wir für jede der Variablen eine solche Zahl finden, so dass links und rechts dasselbe herauskommt.

Klingt kompliziert? Nein, ist es nicht. Einfach so:

- Die Gleichung $5x + 8 = 7x$ wird durch $x = 4$ gelöst, da dann auf beiden Seiten 28 herauskommt.
- Die Gleichung $4x = 8x - 12$ wird durch $x = 3$ gelöst. Dann steht auf beiden Seiten 12.
- Die Gleichung $x + y = 12$ wird durch $x = 2, y = 10$ gelöst, oder auch durch $x = 6, y = 6$. Dann steht immer auf beiden Seiten 12.

  Diese Gleichung hat keine eindeutige Lösung. Sie hat sogar unendlich viele Lösungen! Die kann ich so finden: Ich suche mir ein x aus und rechne dann $12 - x$. Das ist mein Wert für y. Beides zusammen ist dann 12.
- Die Gleichung $x + 1 = x$ ist unlösbar. Egal, was ich einsetze, links steht immer 1 mehr als rechts - somit gibt es keine Lösung!

Eine Gleichung heißt *linear*, wenn keine Variable mit einer Potenz, als Wurzel oder Logarithmus vorkommt.

- $5x^2 = 12$ ist keine lineare Gleichung, weil x da mit 2 potenziert wird.
- $\sqrt{x} = x$ ist keine lineare Gleichung, weil da eine Variable in einer Wurzel vorkommt.
- $5x + 7 = 32$ ist eine lineare Gleichung.

Zum Lösen von Gleichungen, benötigt man die sogenannten *Äquivalenzumformungen*. Dabei machen wir auf beiden Seiten der Gleichung genau dasselbe. Das Tolle ist, dass dabei die Lösung nicht verändert wird!

Zwei Dinge dürfen wir aber nicht. Diese sind streng verboten: Wir dürfen nicht mit Null malnehmen und nicht durch Null teilen. In beiden Fällen kann es sein, dass wir die Lösung verändern! Das gilt auch, wenn wir durch Variablen teilen oder damit malnehmen, das darf man nur, wenn die Variable dann nicht Null sein kann.

Sonst dürfen wir auf beiden Seiten Zahlen, Variablen oder Vielfache von Variablen addieren, subtrahieren, multiplizieren oder dividieren. Was wir dabei als Schritt ausführen, schreiben wir mit einem Strich getrennt dahinter.

Beispiele:

- Wir lösen $5x + 12 = 3x + 24$.

$$\begin{aligned} 5x + 12 &= 3x + 24 | - 12 \\ 5x &= 3x + 12 | - 3x \\ 2x &= 12 | : 2 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

Diese Lösung gilt nun in jeder Zeile! Du kannst in jeder Zeile $x = 6$ einsetzen, in jeder Zeile steht dann links und rechts vom Gleichheitszeichen dasselbe. Man sagt auch, die Gleichungen sind äquivalent (gleichwertig), weil sie alle den gleichen Wert als Lösung haben. Das liegt daran, dass wir nur Äquivalenzumformungen durchgeführt haben.

- Wir lösen $4x = 6x - 14$.

$$\begin{aligned} 4x &= 6x - 14 | - 6x \\ -2x &= -14 | : (-2) \\ x &= 7 \end{aligned}$$

Wichtig ist, dass du beim Lösen von linearen Gleichungen immer erst die Variable auf eine Seite bringst und die übrigen Zahlen auf die andere. Dann sieh zu, dass du so eine Form bekommst:

$$-8x = 17$$

Sprich, auf einer Seite steht nur noch die Variable (x) und ein Vorfaktor (-8), auf der rechten nur eine Zahl (17). Dann erst solltest du teilen.
Wenn du teilst oder malnimmst, solange eine Summe auf einer von beiden Seiten steht, passiert schnell folgender Fehler:

$$\begin{aligned} 8x + 4 &= 16x - 5 | : 2 \\ 4x + 4 &= 8x - 5 \end{aligned}$$

Siehst du, was passiert ist? Da hat jemand nicht wirklich beide Seiten durch 2 geteilt, sondern nur immer den ersten Summanden. Das ist falsch! Richtig wäre das hier:

$$\begin{aligned} 8x + 4 &= 16x - 5 | : 2 \\ 4x + 2 &= 8x - \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Und du siehst schon das Problem, was viele Schüler haben: Da ist ein Bruch. Brüche sind nicht schlimm, und die Gleichung ist immer noch lösbar. Aber einfacher geworden ist sie nicht.

Gleichungen aufstellen

Um manche Probleme zu lösen, musst du die Gleichungen selbst erst einmal aufstellen, bevor du sie löst. Dazu kommt, dass du sehr viele Probleme mit Gleichungen lösen kannst. Es kommen aber nicht immer nur lineare Gleichungen mit einer

Zunächst einmal musst du dir genau klarmachen, wofür die Variable steht. Merk dir nicht „x Kühe”. Schreib hin: „x: Anzahl der Kühe”. Sonst liest du hinterher einen Term wie „$4x$” als „4 Kühe”. „4 mal Anzahl der Kühe” ergibt viel mehr Sinn. (Und ja, es scheint hier um die Beine der Kühe zu gehen. OH NEIN! Um die ANZAHL der Beine der Kühe!)

Wenn du merkst, dass das Aufstellen der Gleichung dir schwerfällt, dann rechne einfach mit deinen Variablen so, wie du mit einfachen Zahlen rechnen würdest. Schreib dann aber nicht das Ergebnis, sondern die Rechnung hin. Dann ersetzt du die einfache Zahl durch deine Variable. So bildest du Terme.
Dann musst du daraus zwei Terme finden, die gleich sind. Oft ist einer davon nur eine Zahl. „Hans und Markus haben dann 12 Hamburger” kann darauf hindeuten, dass der Term für die Anzahl der Hamburger von Hans und der Term für die Anzahl der Hamburger von Markus addiert eben gleich 12 ist. Heißt es, „Hans und Markus haben dann gleich viele Hamburger”, musst du eben zwei Terme gleichsetzen.

Beispiele zum Aufstellen von Gleichungen (und dann lösen wir die auch gleich):

- Dietlinde hat 3 €mehr als Lars dabei. Zusammen haben sie 21€.

  Wir modellieren: x : Geld von Dietlinde in €. Dann hat Lars $x - 3$ €(er hat ja 3 €weniger). Zusammen haben sie dann $x + x - 3$ €. Dann wird das zu:

$$\begin{aligned} x + x - 3 &= 21 \\ 2x - 3 &= 21 | + 3 \\ 2x &= 24 \\ x &= 12 \end{aligned}$$

  Dietlinde hat also 12 €, Lars folglich 9 €.

- Lisa hat doppelt so viele Hamburger gefuttert wie Marsha. Marsha sagt: „Wenn ich noch 5 Hamburger esse, haben wir beide gleich viel.”

  Hier modellieren wir: x: Anzahl der Hamburger von Marsha. Dann hat Lisa $2x$ Hamburger gegessen. Wenn Marsha noch 5 Hamburger isst, hat sie $x + 5$ Hamburger gegessen. Es ist also:

$$\begin{aligned} x + 5 &= 2x | - x \\ 5 &= x \end{aligned}$$

  Marsha hat also 5 Hamburger gegessen.

- Mario ist dreimal so alt wie Patrick. In drei Jahren ist Mario doppelt so alt wie Patrick. Wie alt ist Patrick?

  Wir definieren: x: Alter von Patrick in Jahren.

  Dann ist Mario wie alt? Wir denken uns erstmal, dass Patrick z.B. 5 Jahre ist, also ist Mario $3 \cdot 5$, da er ja dreimal so alt ist. Da wir nicht wissen, ob die 5 stimmt, machen wir da einen Term mit Variable draus, also ist Mario $3x$ Jahre alt.

  In 3 Jahren ist Patrick dann $5 + 3$ Jahre alt. Auch da machen wir wieder einen Term draus, also $x + 3$ Jahre. Mario ist dann $3x + 3$ Jahre alt. Das ist aber nur noch doppelt so viel wie derzeit! Das Doppelte von Patricks Alter in 3 Jahren ist $2(x + 3)$, da man ja sein Alter dann verdoppeln muss. Damit haben wir die Gleichung! Es ist also:

$$\begin{aligned}
2 \cdot (x+3) &= 3x+3 \\
2x+6 &= 3x+3 & &| -3x \\
-x+6 &= 3 & &| -6 \\
-x &= -3 & &| :(-1) \\
x &= 3
\end{aligned}$$

  Patrick ist also 3 Jahre alt.

  Überprüfen wir das: Patrick ist 3 Jahre alt, also ist Mario 9. In 3 Jahren ist Patrick 6 und Mario 12 - das ist das Doppelte.

- In einem Prisma mit dreieckiger Grundfläche gilt: $V = 400cm^3$. Die Grundfläche hat eine Seite mit der Länge $a = 10cm$, auf dieser steht eine Höhe im Dreieck von $8cm$. Bestimme die Höhe des Prismas!

  Aus der Formelsammlung kriegen wir: $V = Gh$ für das Prisma. Die Grundfläche ist ein Dreieck, also gilt $G = \frac{gh_g}{2}$. Es ist also

$$\begin{aligned}
400cm^3 &= \frac{10cm \cdot 8cm}{2} \cdot h & &| \cdot 2 \\
800cm^3 &= 80cm^2 \cdot h & &| : 80cm^2 \\
\frac{800cm^3}{80cm^2} = 10cm &= h
\end{aligned}$$

  Das Prisma ist also $10cm$ hoch.

Aufgaben

1. Löse die Gleichung: $8x + 12 = 3x + 27$.

2. Auf einer Wiese stehen gleich viele Kühe, Pferde, Schafe und Hühner und ein Mensch. Insgesamt haben sie 198 Beine. Wie viele Kühe sind auf der Wiese?

2 Lösungen

1.

$$\begin{aligned} 8x + 12 &= 3x + 27 | - 12 \\ 8x &= 3x + 15 | - 3x \\ 5x &= 15 | : 5 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

2. Wir nehmen x als Anzahl der Kühe (und Schafe und Pferde und Hühner). Dann haben die Kühe $4x$ Beine, ebenso wie die Schafe und Pferde. Die Hühner haben $2x$ Beine. Der Mensch hat 2 Beine. Dann haben wir als Gleichung:

$$\begin{aligned} 4x + 4x + 4x + 2x + 2 &= 198 | - 2 \\ 14x &= 196 | : 14 \\ x &= 14 \end{aligned}$$

Es sind also 14Kühe.